CURRICULUM VITAE
E ATTIVITÀ DIDATTICA E SCIENTIFICA
DI FRANCESCA ASTENGO

Dati anagrafici e recapiti

- Francesca Astengo, nata a Genova (GE) il 26/04/1968, residente a Genova in via dei Tassorelli 15, CAP 16146 (tel. 010 365413).
- Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Genova, Via Dodecaneso 35, 16146 Genova (tel. 010 3536827, fax 010 3536752).
- e-mail: `astengo@dima.unige.it`

Titoli di studio

- Laurea in Matematica presso l'Università degli Studi di Genova, con la votazione 110/110 e lode, conseguita il 4 aprile 1991 (relatore prof. Giancarlo Mauceri).
- dottore di ricerca in Matematica; titolo conseguito a Roma, il 24 gennaio 1997, discutendo una tesi dal titolo *Moltiplicatori su estensioni armoniche di gruppi di tipo Heisenberg*, di cui è stato relatore il prof. G. Mauceri.

Posizioni ricoperte

- Ottobre 1990: borsista C.N.R. (borsa di studio annuale per laureandi, bando n° 209.01.53 del 22/01/1990).
- Febbraio 1992: dottoranda in Matematica presso l'Università di Torino.
- Dicembre 1994: assunta come ricercatore presso il Politecnico di Torino (raggruppamento disciplinare A02A), confermata con Decreto Rettorale del 14 luglio 1998.
- Novembre 1999: trasferimento alla facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali dell'Università di Genova.

Articoli pubblicati su riviste a diffusione internazionale

(1) Geodesic inversion and Sobolev spaces on Heisenberg type groups, con B. Di Blasio, *Ark. Mat.* **43** (2005), 51–67.
(2) The Cayley transform and uniformly bounded representations, con M. Cowling e B. Di Blasio, *J. Funct. Anal.* **213** (2004), 241–269.
(3) An uncertainty principle on homogeneous trees, *Proc. Amer. Math. Soc.* **131** (2003), 3155-3161.

(4) The Schwartz space and homogeneous distributions on H–type groups, con B. Di Blasio, *Monatsh. Math.* **132** (2001), 197–214.
(5) Hardy's Uncertainty principle on certain Lie groups, con M. Cowling, B. Di Blasio e M. Sundari, *J. London Math. Soc.* **62** (2000), 461–472.
(6) A Paley–Wiener Theorem on NA harmonic spaces, con B. Di Blasio, *Colloq. Math.* **80** (1999), 211–233.
(7) The Helgason Fourier transform on nonsymmetric harmonic spaces, con R. Camporesi e B. Di Blasio, *Bull. Austral. Math. Soc.* **55** (1997), 405–424.
(8) A class of L^p-convolutors on harmonic extensions of H-type groups, *J. Lie Theory* **5** (1995), 147–164.
(9) Multipliers for a distinguished laplacean on solvable extensions of H-type groups, *Monatsh. Math.* **120** (1995), 179–188.
(10) The maximal ideal space of a heat algebra on solvable extensions of H-type groups, *Boll. Un. Mat. Ital. Serie (7)* **9** A (1995), 157–165.

Articoli in corso di stampa

(11) The Gelfand transform of homogeneous distributions on Heisenberg type groups, con B. Di Blasio (pp. 27), accettato per la pubblicazione su *J. Austral. Math. Soc.*
(12) Sobolev spaces and the Cayley transform, con B. Di Blasio (pp. 13), accettato per la pubblicazione su *Proc. Amer. Math. Soc.*

Tesi di Dottorato

(13) Moltiplicatori su estensioni armoniche di gruppi di tipo Heisenberg (pp. 85), Università di Torino, 1996.

Preprint

(14) The Gelfand transform of radial Schwartz functions on the Heisenberg group, con B. Di Blasio e F. Ricci (pp. 20).

Lavori didattici

(15) Dispense per il corso di Istituzioni di Analisi 2, corso di laurea in Statistica Matematica e Trattamento Informatico dei Dati (pp. 95, serie numeriche, equazioni differenziali, funzioni di più variabili reali, integrali doppi).
(16) Dispense per il corso di Analisi Matematica 2, corso di laurea in Statistica Matematica e Trattamento Informatico dei Dati (pp. 81, proprietà globali delle funzioni continue, calcolo differenziale e integrale per funzioni reali di una variabile reale).

Organizzazione di convegni scientifici

- Convegno nazionale di Analisi Armonica, Aosta giugno 1999, in collaborazione con G. Grillo, M. Peloso e A. Tabacco.
- XXIV Convegno nazionale di Analisi Armonica, Sestri Levante 29 marzo – 1 aprile 2004, in collaborazione con F. De Mari, G. Mauceri e A. Veneruso.

Inviti presso enti di ricerca stranieri

- Maggio 2003, marzo 2002, agosto 1999, giugno-luglio 1997: School of Mathematics, University of New South Wales di Sydney (Australia), su invito del prof. Michael Cowling.
- Aprile 1997: Chalmers Institute of Technology di Göteborg (Svezia), su invito del prof. Peter Sjögren.
- Marzo 1996: Mittag-Leffler Institute di Stoccolma (Svezia), in occasione dell'anno di studi di analisi armonica su gruppi.

Relazioni presentate a convegni

- "Distribuzioni omogenee sul gruppo di Heisenberg", XVII congresso dell'Unione Matematica Italiana, Milano, settembre 2003.
- "Funzioni di Schwartz su gruppi di tipo Heisenberg", Convegno Nazionale di Analisi Armonica, Como, giugno 2000.
- "The Fourier transform on NA harmonic spaces", *CMA National Symposium on Operator Algebras, Ergodic Theory, and Harmonic Analysis*, Sydney (Australia), luglio 1997.
- "Moltiplicatori L^p su estensioni armoniche di gruppi di tipo Heisenberg", Convegno Nazionale di Analisi Armonica, Grado, maggio 1996.
- "L^p convolutors on harmonic extensions of H–type groups", *Geometry and Analysis on Lie Groups*, Tuczno (Polonia), giugno 1995.

Altre notizie

- Afferisco al Gruppo Nazionale per l'Analisi Funzionale e le sue Applicazioni e sono membro U.M.I. dal 2003.
- Sono stata referee per la rivista *Anal. and Appl. (Singap.)*

Attività didattica

• Sono stata *tutor* per la *Instructional Conference: Analysis on Lie groups and PDEs*, Edimburgo ICMS, 6-16 Aprile 1999.

• Sono stata relatore di tesi di laurea. Sono stata *tutor* di seminari di avviamento alla ricerca.

• Corsi tenuti per affidamento presso l'Università di Genova, con relative esercitazioni:

- Equazioni Differenziali, per il corso di Laurea in Matematica, A.A. 2000/01.
- Istituzioni di Analisi Matematica 1, per il corso di Laurea in Statistica Matematica e Trattamento Informatico dei Dati, A.A. 2002/03.
- Istituzioni di Analisi Matematica 2, per il corso di Laurea in Statistica Matematica e Trattamento Informatico dei Dati, A.A. 2003/04.
- Analisi Matematica 2, per il corso di Laurea in Statistica Matematica e Trattamento Informatico dei Dati, A.A. 2004/05.

• Esercitazioni svolte presso l'Università di Genova:

- Istituzioni di Analisi Superiore 1 (nuovo ordinamento) per matematici (Prof. L. Burlando, A.A. 2004/05)
- Analisi 3 (nuovo ordinamento) per matematici (Prof. A. Aruffo, A.A. 2003/04) e per statistici (Prof. A. Zappa, A.A. 2004/05)
- Analisi 2 (nuovo ordinamento) per matematici (Prof. A. Aruffo, A.A. 2002/03)
- Analisi 1 (nuovo ordinamento) per matematici (Prof. A. Aruffo, A.A. 2002/03)
- Equazioni Differenziali per matematici (Prof. G. Mauceri, A.A. 2001/02)
- Istituzioni di Matematica per geologi (Prof. E. Muselli, A.A. 2001/02)
- Istituzioni di Analisi Superiore, I modulo, per matematici (Prof. A. Aruffo, AA.AA. 2000/02)
- Analisi Matematica I per matematici (Prof. P. Oppezzi, A.A. 1999/2000).

• Esercitazioni svolte presso il Politecnico di Torino:

- Metodi Matematici per l'Ingegneria (Prof. E. Vesentini, AA.AA. 98/2000)
- Analisi Matematica I per ingegneri elettronici, meccanici, nucleari (Proff. C. Canuto, V. Chiadò-Piat, D. Giublesi, A. Tabacco, AA.AA. 95/2000)
- Calcolo delle Probabilità per ingegneri elettronici (Prof. G. Pistone, A.A. 94/95)

Attività organizzativa

Sono membro della commissione didattica del corso di Laurea in Statistica Matematica e Trattamento Informatico dei Dati. Sono responsabile della commissione orientamento dello stesso corso di laurea e del gruppo di lavoro web del mio dipartimento.

Descrizione dell'attività scientifica

La mia ricerca è rivolta a problemi di analisi armonica su gruppi di Lie. In particolare, mi sono occupata di due tipi di problemi: da una parte questioni di calcolo funzionale, moltiplicatori e operatori integrali singolari, dall'altra proprietà della trasformata di Fourier, come la caratterizzazione della trasformata di Fourier di alcune classi di funzioni o distribuzioni.

Ho trattato questi problemi su vari tipi di gruppi di Lie. È interessante scoprire come proprietà algebriche del gruppo e proprietà geometriche della varietà differenziabile sottostante influenzino proprietà analitiche.

Elenco qui brevemente i gruppi che sono oggetto dello studio. Innanzi tutto, il gruppo di Heisenberg e le sue generalizzazioni, introdotte da A. Kaplan [*Trans. Amer. Math. Soc.* **258** (1980), 147–153] come una classe di gruppi con soluzioni fondamentali esplicite per il sublaplaciano. Alcuni di questi gruppi nilpotenti N intervengono nella decomposizione di Iwasawa dei gruppi semplici non compatti di rango uno e ogni spazio simmetrico non compatto di rango uno si può identificare con un opportuno gruppo NA, dove N agisce per traslazioni e A è $\mathbb{R}^+$ agente per dilatazioni. I gruppi del tipo NA, con N di tipo Heisenberg, sono diventati famosi perché sono varietà armoniche non simmetriche e quindi costituiscono controesempi alla congettura di Lichnerowicz. Sono noti anche con il nome di spazi di Damek–Ricci [*Bull. Amer. Math. Soc.* **27** (1992), 139–142].

1. Operatori in spazi di Lebesgue e di Sobolev

1.1. **Rappresentazioni uniformemente limitate e mappe conformi.** (articoli [**??**,**??**,**??**])

La proiezione stereografica dei punti della sfera S^n sul piano permette di identificare $\mathbb{R}^n$ come un aperto denso della sua compattificazione di Alexandroff. In termini di azioni di gruppi, possiamo spiegare questo fenomeno come identificazione di opportuni *coset.* Il gruppo $G = \mathrm{SO}(n, 1)$ agisce per trasformazioni lineari fratte sulla palla di $\mathbb{R}^n$ e questa azione è la sovrapposizione di tre "movimenti principali": brevemente si scrive $G = KAN$, dove il sottogruppo $K = \mathrm{SO}(n+1)$ è compatto e agisce per rotazioni, N è un sottogruppo formato da matrici nilpotenti isomorfo a $\mathbb{R}^n$ (in questo caso abeliano) e A è un sottogruppo commutativo di dimensione uno (isomorfo a $\mathbb{R}$) e agisce per dilatazioni.

L'azione di G si estende anche al bordo, cioé alla sfera S^n. Lo stabilizzatore del polo nord P_N risulta essere MAN, dove $M = \mathrm{SO}(n)$ è il centralizzatore di A in K e l'azione risulta essere transitiva. Quindi la sfera, come spazio omogeneo G/MAN, può essere identificata con $KAN/MAN \simeq K/M$. D'altra parte esiste un gruppo di matrici nilpotenti, solitamente denotato con $\bar{N}$ e isomorfo a $\mathbb{R}^n$, che agisce in maniera semplicemente transitiva sulla sfera S^n privata del polo nord. Pertanto $G/MAN \simeq \bar{N} \cup \{P_N\}$. La proiezione stereografica della sfera su $\mathbb{R}^n$ non è altro che l'identificazione dei coset $gMAN$ in K/M e $\bar{N} \cup \{P_N\}$.

Questo è il modello di un fenomeno più generale: sia G un gruppo semisemplice non compatto e di rango uno, con decomposizione di Iwasawa KAN e cella grassa di Bruhat $\bar{N}MAN$. Allora il bordo G/MAN può essere identificato con K/M e, a meno di un punto, con $\bar{N}$. Queste identificazioni inducono la trasformata di Cayley $\mathcal{C} : \bar{N} \to K/M$, generalizzazione della proiezione stereografica (o meglio, della sua inversa). In collaborazione con M. Cowling e B. Di Blasio abbiamo dimostrato che $\mathcal{C}$ è una mappa conforme di varietà di Carnot–Caratheodory. Abbiamo inoltre dimostrato che l'operatore di composizione con la trasformata di Cayley, combinata con la moltiplicazione per una potenza opportuna del suo Jacobiano, induce isomorfismi tra gli spazi di Sobolev $\mathcal{H}^\alpha(\bar{N})$ e $\mathcal{H}^\alpha(K/M)$.

L'inversione geodetica dello spazio simmetrico G/K si estende al bordo, che abbiamo identificato a meno di un punto con $\bar{N}$. In collaborazione con B. Di Blasio abbiamo dimostrato che l'operatore di composizione con l'inversione geodetica di $\bar{N}$, combinata con la moltiplicazione per una potenza opportuna del suo Jacobiano, induce isomorfismi tra gli spazi di Sobolev $\mathcal{H}^\alpha(\bar{N})$.

Un'importante conseguenza di questi risultati è la costruzione di rappresentazioni uniformemente limitate e a crescita controllata del gruppo G. Appoggiandosi su questi risultati, P. Julg ha recentemente dimostrato la congettura di Baum–Connes con coefficienti per il gruppo $\mathrm{Sp}(n,1)$ [*C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **334** (2002), 533–538]. La conformalità di queste mappe è la proprietà che gioca un ruolo fondamentale nella nostra analisi. Molti risultati falliscono quando questa proprietà viene a mancare.

1.2. **Moltiplicatori.** (articoli [**??**,**??**,**??**]) Questa ricerca ha costituito l'argomento della mia tesi di dottorato, di cui è stato relatore il Prof. G. Mauceri. Il problema principale deriva dal calcolo funzionale: sia (X,μ) uno spazio di misura e A un operatore lineare densamente definito, essenzialmente autoaggiunto e positivo su $L^2(X)$. Allora A ha una decomposizione spettrale $A = \int_0^\infty \lambda \, dE(\lambda)$. Tramite il teorema spettrale, per ogni funzione m Borel misurabile e limitata su $[0,+\infty)$, possiamo definire l'operatore $m(A) = \int_0^\infty m(\lambda)\, dE(\lambda)$, che risulta essere limitato su $L^2(X)$. Un problema classico e molto studiato è quello di trovare condizioni necessarie o sufficienti affinché l'operatore $m(A)$ si estenda a un operatore limitato su $L^p(X)$ per un qualche $p \in [1,\infty]$. Quando questo accade, diremo che m è un moltiplicatore spettrale di L^p. Per il teorema spettrale, tutte e sole le funzioni che sono in $L^\infty([0,\infty), dE)$ sono moltiplicatori di L^2; in particolare, il calcolo funzionale L^2 si applica a ogni situazione, senza distinguere alcuna proprietà dello spazio di misura sottostante X. Invece il calcolo funzionale L^p è molto diverso a seconda dello spazio di misura X e dell'operatore A considerati.

Il calcolo funzionale L^p è un problema molto studiato e rivela fenomeni che non sono ancora del tutto compresi. In particolare è stato e ancora è molto studiato il caso in cui lo spazio di misura è un gruppo di Lie oppure uno spazio omogeneo (quindi un quoziente di un gruppo). Dagli esempi noti in letteratura si evince una sorta dicotomia: da una parte ci sono spazi e operatori che danno origine a un calcolo funzionale differenziabile su L^p, $p \neq 2$, dall'altra ci sono spazi e operatori che danno origine a un calcolo funzionale olomorfo su L^p, $p \neq 2$.

Nel caso in cui lo spazio di misura X sia un gruppo di Lie e l'operatore A sia (meno) il Laplace–Beltrami relativo alla struttura riemanniana invariante a sinistra: se la crescita del volume è polinomiale, le funzioni C^∞ a supporto compatto risultano essere moltiplicatori L^p per ogni p, $1 < p < \infty$; se la crescita del volume è esponenziale e X è uno spazio simmetrico, occorre che m si estenda a una funzione olomorfa in un opportuno sottoinsieme del piano complesso, con ampiezza che dipende da p.

Mi sono occupata di estendere risultati noti di calcolo funzionale nel caso degli spazi simmetrici di rango uno al caso delle estensioni armoniche NA di gruppi di tipo Heisenberg, che sono gruppi a crescita esponenziale del volume. Ho studiato il calcolo funzionale di due laplaciani: l'operatore di Laplace–Beltrami rispetto alla struttura Riemanniana invariante sinistra su NA e un laplaciano canonico invariante destro, che si scrive come somma di quadrati dei campi vettoriali che formano una particolare base ortonormale dell'algebra di Lie di NA. Indichiamo con $\mathcal{L}_Q$ e Δ i rispettivi operatori essenzialmente autoaggiunti su $L^2(NA)$ rispetto alla misura di Haar sinistra, con spettro L^2 uguale a $[0, \infty)$.

Ho esteso al caso non simmetrico i risultati di S. Giulini, G. Mauceri e S. Meda [*J. Reine Angew. Math.* **482** (1997), 151–175], per quanto riguarda i moltiplicatori dell'operatore di Laplace–Beltrami $\mathcal{L}_Q$, e quelli di M. Cowling, Giulini, A. Hulanicki e Mauceri [*Studia Math.* **111** (1994), 103–121], per quanto riguarda i moltiplicatori del laplaciano invariante destro Δ. Ho dimostrato che l'operatore $\mathcal{L}_Q$ ha un calcolo differenziale olomorfo, mentre il laplaciano invariante destro Δ ha un calcolo funzionale non olomorfo: se, per un qualche $a > 0$, m è nello spazio di Sobolev H^{s_0} sull'intervallo $[0, a]$ con $s_0 > 3/2$ e m è in $C^I((a/2, \infty))$ con $I > (n + 1)/2$ e vale la stima $\sup_{\lambda \geq a} |\lambda^j m^{(j)}(\lambda)| < \infty$, per ogni $j = 0, \ldots, I$, allora $m(\Delta)$ è di tipo debole $(1, 1)$ e limitato su $L^p(NA)$, $1 < p < \infty$.

L'articolo [**??**], che testimonia come non solo lo spazio di misura, ma anche l'operatore influisca sul problema dei moltiplicatori, è stato citato da molti autori. In particolare: da S. Mustapha [*Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **48** (1998) 957–966] che dimostra un risultato analogo; da A. Sikora [*Studia Math.* **152** (2002), 125–130] che raffina alcune condizioni; da W. Hebisch [*Rev. Mat. Iberoamericana* **16** (2000) 597-604] che fornisce un altro esempio di gruppo a crescita esponenziale e operatore con calcolo funzionale non olomorfo; da W. Hebisch, T. Steger [*Math. Z.* **245** (2003) 37–61] che stabiliscono una teoria di Calderón–Zygmund per trattare operatori integrali singolari adattata al caso dell'operatore Δ su uno spazio simmetrico X; da J. Ludwig, D. Müller [*J. Funct. Anal.* **170** (2000) 366–427] che hanno esplorato la relazione tra calcolo funzionale olomorfo e l'asimmetria dell'algebra generata dal nucleo del calore.

2. Proprietà della trasformata di Fourier

2.1. **Teoremi di incertezza.** (articoli [**??**,**??**]). Un Principio di incertezza è un'affermazione riguardante una funzione f e la sua trasformata di Fourier $\widehat{f}$: si stabilisce che, a meno che f

non sia nulla, non è possibile localizzare precisamente sia f sia $\widehat{f}$. In particolare il Teorema di Hardy afferma che se f è una funzione misurabile su $\mathbb{R}$ con un decadimento gaussiano del tipo $|f(x)| \leq C\, e^{-\alpha|x|^2}$ per ogni x in $\mathbb{R}$ e la sua trasformata soddisfa $|\widehat{f}(\xi)| \leq C\, e^{-\beta|\xi|^2}$ per ogni ξ in $\mathbb{R}$ con $\alpha\beta > 1/4$, allora f è nulla quasi ovunque.

In collaborazione con M. Cowling, B. Di Blasio, M. Sundari abbiamo affrontato questo tipo di problema nell'ambito degli spazi armonici NA e su un'ampia classe di gruppi di Lie: i gruppi nilpotenti di passo due; tale classe comprende anche i gruppi di tipo Heisenberg N.

Nel caso degli spazi armonici NA i decadimenti di tipo gaussiano sulla funzione vengono misurati tramite la distanza geodetica dall'identità.

Ricordiamo che, fissato un qualsiasi prodotto interno, l'algebra di Lie di un gruppo nilpotente di passo due si decompone nella somma diretta ortogonale del centro $\mathbf{z}$ e di $\mathbf{v} = \mathbf{z}^\perp$ suo complemento ortogonale. Nel caso dei gruppi nilpotenti di passo due è sufficiente imporre un decadimento di tipo gaussiano nella sola variabile centrale, cioè quella corrispondente tramite la mappa esponenziale a $\mathbf{z}$. Problemi di incertezza in vari ambiti sono ancora molto studiati. Questo articolo è stato citato da S. Thangavelu [*Math. Z.* **242** (2002), 761–779].

Recentemente ho stabilito un risultato analogo a questo nel caso di funzioni definite su un albero omogeneo di grado $q+1$, ovvero di un grafo connesso senza "loop" in cui ogni vertice è adiacente a $q+1$ altri vertici.

2.2. **Distribuzioni omogenee e funzioni di Schwartz.** (articoli [**??**,**??**,**??**]). In $\mathbb{R}^n$ è ben noto che la trasformata di Fourier preserva lo spazio di Schwartz e che una distribuzione è omogenea di grado α e di classe C^∞ su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ se e solo se la sua trasformata di Fourier è una distribuzione omogenea di grado $-n-\alpha$ e di classe C^∞ su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Indichiamo con $\mathbb{H}^m \simeq \mathbb{C}^m \times \mathbb{R}$ il gruppo di Heisenberg, dotato delle usuali dilatazioni anisotropiche che lo rendono un gruppo di dimensione omogenea $2m+2$. Una funzione f su $\mathbb{H}^m$ si dice radiale se $f(k \cdot z, t) = f(z,t)$, per ogni k nel gruppo unitario $\mathrm{U}(m)$ e per ogni (z,t) in $\mathbb{H}^m$. Oggetto dello studio sono le funzioni di Schwartz e le distribuzioni su $\mathbb{H}^m$ che coincidono con funzioni C^∞ su $\mathbb{H}^m \setminus \{(0,0)\}$, radiali e omogenee di grado $\alpha - 2m - 2$; chiamiamo tali distribuzioni nuclei di tipo α. Lo spettro di Gelfand $\mathcal{G}$ dell'algebra delle funzioni integrabili e radiali può essere identificato, anche topologicamente, con il ventaglio di Heisenberg, ovvero con il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{G} \simeq \{(\lambda,\xi) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \lambda \neq 0, \quad \xi = |\lambda|(2d+m), \quad d \in \mathbb{N}\} \cup \{(0,\xi) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \xi \geq 0\}.$$

Mi sono dilungata in queste notazioni perché desidererei che fosse chiaro come lo spettro di Gelfand sia problematico, in quanto contenente una parte continua e una parte discreta. Per esempio, le caratterizzazioni dello spazio di Schwartz note fino a poco tempo fa, sono legate a complicati operatori, insieme differenziali e alle differenze [Benson, Jenkins e Ratcliff, *J. Funct. Anal.*, **154** (1998), 379–423].

Tuttavia, risultati dovuti a Hulanicki [*Studia Math.* **78** (1984), 253–266] e a Mauceri [*Symp. Math.*, Vol. XXIX 47–62], mostrano che la restrizione al ventaglio di Heisenberg di una funzione di Schwartz su $\mathbb{R}^2$ è la trasformata di Gelfand di una funzione di Schwartz sul gruppo $\mathbb{H}^m$.

Molto recentemente, in collaborazione con B. Di Blasio e F. Ricci, abbiamo dimostrato anche l'affermazione inversa, ossia che la trasformata di Gelfand di una funzione di Schwartz sul gruppo $\mathbb{H}^m$ si può estendere a una funzione di Schwartz su $\mathbb{R}^2$.

In collaborazione con B. Di Blasio ci siamo occupate del caso delle distribuzioni omogenee e abbiamo dimostrato che le seguenti condizioni sono equivalenti per $\psi : \mathcal{G} \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{C}$:
1. ψ è la trasformata di Gelfand di un nucleo di tipo α su $\mathbb{H}^m$;
2. ψ si estende ad una funzione C^∞ sul semipiano superiore e omogenea di grado $-\alpha/2$;
3. per ogni $\lambda \neq 0$, d in $\mathbb{N}$ si ha $\psi(\lambda, |\lambda|(2d+m)) = |\lambda|^{-\alpha/2}\, \psi\big(\frac{\lambda}{|\lambda|}, 2d+m\big)$ e, inoltre, esiste una successione (c_j) tale che, per ogni N in $\mathbb{N}$,
$$\psi(\pm 1, 2d+m) = \sum_{j=0}^{N} (\pm 1)^j\, c_j\, (2d+m)^{-j-\alpha/2} + o\big(d^{-N-\alpha/2}\big) \qquad d \to +\infty.$$

Quest'ultimo risultato ha un analogo per nuclei biradiali di tipo α su gruppi di tipo Heisenberg.

2.3. **Trasformata e Teoremi di tipo Paley–Wiener su gruppi NA armonici.** (articoli [**??**,**??**]).

L'analisi armonica delle funzioni radiali su NA, cioè delle funzioni che dipendono solo dalla distanza dall'identità, è stata sviluppata da E. Damek e F. Ricci [*J. Geom. Anal.* **2** (1992), 213–248]. In collaborazione con R. Camporesi e B. Di Blasio, abbiamo determinato una trasformata di Fourier nel caso in cui la funzione non sia necessariamente radiale. Questa trasformata è ottenuta integrando contro potenze del nucleo di Poisson, ossia quel nucleo che permette di risolvere il problema di Dirichlet.

Abbiamo dimostrato il teorema di Plancherel, la formula di inversione e una parte del Teorema di Paley–Wiener. La parte mancante del Teorema di Paley–Wiener è ancora oggi oggetto di studio per alcuni autori; con ipotesi semplificative è stata dimostrata da S. Thangavelu [*Math. Z.* **245** (2003) 483 – 502].

In seguito, in collaborazione con B. Di Blasio, abbiamo caratterizzato l'immagine della trasformata di Fourier di funzioni a supporto in particolari insiemi. Abbiamo dimostrato un teorema di tipo Paley–Wiener per funzioni non radiali su NA a supporto in un insieme il cui bordo è la generalizzazione di un iperpiano, ovvero un insieme della forma Na, a in A.